Exercice 3 :

En utilisant un changement de variable, calculer les intégrales suivantes :

$$I = \int_1^e \frac{3+\ln x}{(4+\ln x)^2}dx \quad , \quad J = \int_0^2 \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}}dx \quad , \quad K = \int_0^4 \sqrt{x^2\sqrt{x} + x}dx$$

$$L = \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \frac{(\cos x)^3}{(2+\sin x)^2}dx \quad , \quad M = \int_{\ln 2}^0 \left(\frac{e^x+3e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\right)dx.$$

Pour M, on peut utiliser l'égalité : $\frac{t^2+3}{t(t^2+1)} = \frac{3}{t} - \frac{2t}{t^2+1}$

EX 3

calculons : $I = \int_1^e \frac{3+\ln x}{(4+\ln x)^2}\,dx$

En utilisant un changement de variables,

On pose : $t = 4 + \ln x$, et on trouve :

$\ln x = t - 4 \Rightarrow x = \exp(t-4) \Rightarrow dx = \exp(t-4)\,dt$

et on a : $\begin{cases} x = 1 \\ x = e \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 4 \\ t = 5 \end{cases}$

On obtient donc :

$$I = \int_4^5 \frac{t-1}{t^2} e^{t-4}\, dt$$

$$= \int_4^5 \frac{e^{t-4}}{t}\, dt - \int_4^5 \frac{e^{t-4}}{t^2}\, dt = I_1 - I_2$$

Calculons alors I_1, en utilisant une intégration par parties : $I_1 = e^{-4}\int_4^5 \frac{e^t}{t}\,dt$:

posons :

$$\begin{cases} u(t) = \frac{1}{t} \\ v'(t) = e^t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(t) = -\frac{1}{t^2} \\ v(t) = e^t \end{cases}$$

on trouve :

$$I_1 = e^{-4}\left[\frac{e^t}{t}\right]_4^5 + e^{-4}\int_4^5 \frac{e^t}{t^2}\,dt = e^{-4}\left(\frac{e^5}{5} - \frac{e^4}{4}\right) + I_2$$

Finalement, on trouve:

$$I = I_1 - I_2 = \frac{2}{5} - \frac{1}{4}$$

pour J on a:

$$J = \int_0^2 \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}}\,dx$$

En utilisant le chang de variable : $t = e^x + 1$ /

on obtient :

$$\begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = e^2 + 1 \end{cases}$$

et $dt = e^x \, dx$,

par suite ;

$$I = \int_2^{e^2+1} \frac{t-1}{\sqrt{t}} \, dt$$

Donc

$$J = \int_2^{e^2+1} \sqrt{t}\,dt - \int_2^{e^2+1} \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt$$

$$= \left[\frac{2}{3}(t)^{3/2}\right]_2^{e^2+1} - \left[2\sqrt{t}\right]_2^{e^2+1}$$

$$\overset{(=)}{J} = \frac{2}{3}\left(\sqrt{\ell+1}^{\,3} - \sqrt{2}^{\,3}\right) - 2\left(\sqrt{\ell+1} - \sqrt{2}\right)$$

2ème méthode pour J:

calculons J, en utilisant un chang de variables :

$$J = \int_0^{e} \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}}\,dx$$

On pose : $t = \sqrt{e^x+1}$

On a donc :

$$\begin{cases} x=0 \\ x=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t=\sqrt{2} \\ t=\sqrt{e^2+1} \end{cases}$$

et $dt = \frac{1}{2} \frac{e^x}{\sqrt{e^x+1}} dx$

On trouve alors :

$$J = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{e^2+1}} 2(t^2-1)\,dt$$

$$= \left[2\frac{t^3}{3} - 2t\right]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{e^2+1}}$$

$$\Leftrightarrow I = \frac{2}{3}\sqrt{e^2+1}^{\,3} - 2\sqrt{e^2+1} - \frac{2}{3}\sqrt{2}^{\,3} + 2\sqrt{2}$$

calculons K :

En posant : $t = \sqrt{x}$, on trouve :

$$\begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 2 \end{cases}$$

et $dt = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x}} dx \Leftrightarrow dx = 2t\,dt$

Par suite,

$$K = \int_0^2 2t\sqrt{t^5+t^2}\, dt$$

$$= 2\int_0^2 t^2\sqrt{t^3+1}\, dt$$

$$= \frac{2}{3}\int_0^2 (3t^2)\,(t^2+1)^{1/2}\, dt$$

On obtient donc:

$$K = \frac{2}{3}\left[\frac{2}{3}(t^3+1)^{3/2}\right]_0^2$$

$$= \frac{4}{9}\left(\sqrt{9}^3 - 1\right) = \frac{4}{9} \times 26$$

$$= \frac{104}{9}$$

calculons L :

En utilisant le chang de variables : $t = 2 + \sin x$,

On trouve :

$$\begin{cases} x = -\frac{\pi}{2} \\ x = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 2 \end{cases}$$

et $dt = \cos x \quad dx.$

En suite,

$$= \int_1^2 \frac{1-(t-2)^2}{t^2}\, dt$$

$$= \int_1^2 \frac{1-(t^2-4t+4)}{t^2}\, dt$$

$$\Leftrightarrow L = \int_1^2 \frac{-3 - t^2 + 4t}{t^2}\, dt$$

$$= \left[\frac{3}{t} - t + 4\ln t\right]_1^2$$

$$= \left(\frac{3}{2} - 2 + 4\ln 2\right) - \left(3 - 1\right)$$

$$= -\frac{5}{2} + 4\ln 2$$

1ère méthode pour M:

calculons M :

On a :

$$M = \int_{\ln 2}^{0} \left(\frac{e^{x} + 3e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}} \right) dx$$

$$= \int_{\ln 2}^{0} \frac{e^{2x} + 3}{e^{2x} + 1} \, dx$$

En utilisant le chang de variables, $t = e^x$, on trouve :

$$\begin{cases} x = \ln 2 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = 1 \end{cases}$$

et $dt = e^{x} dx \Leftrightarrow \frac{dt}{t} = dx$.

Par suite,

$$M = \int_{2}^{1} \frac{t^2+3}{t^2+1} \cdot \frac{dt}{t}$$

comme $\dfrac{t^2+3}{t(t^2+1)} = \dfrac{3}{t} - \dfrac{2t}{t^2+1}$,

alors,

$$M = \Big[3\ln t - \ln(t^2+1)\Big]^{1}$$

$$= -\ln 2 - \left(3\ln 2 - \ln\frac{2}{5}\right)$$

Finalement

$M = \ln 5 - 4 \ln 2.$

$2^{\text{ème}}$ méthode :

En posant : $t = e^{2x} + 1$,

On trouve :

$$\begin{cases} x = \ln 2 \\ x = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} t = 5 \\ t = 2 \end{cases}$$

et $dt = 2e^{2x}\, dx$

$\Longleftrightarrow \quad dx = \dfrac{1}{2(t-1)}\, dt$

Par suite

$$M = \int_5^2 \frac{t+2}{t} \cdot \frac{1}{2} \frac{1}{(t-1)}\, dt$$

$$= \frac{1}{2} \int_5^{2t} \frac{t+2}{t(t-1)}\, dt$$

Or : $\dfrac{t+2}{t(t-1)} = \dfrac{-2}{t} + \dfrac{3}{t-1}$

Donc

$$M = \int_5^2 -\frac{1}{t}\,dt + \frac{3}{2}\int_5^2 \frac{1}{t-1}\,dt$$

$$= \left[-\ln t + \frac{3}{2}\ln(t-1) \right]_5^2$$

Finalement,

$$M = (-\ln 2) - \left(-\ln 5 + \frac{3}{2}\ln 4\right)$$

$$= -\ln 2 - \frac{3}{2}\ln 4 + \ln 5$$

$$= -4\ln 2 + \ln 5$$

3ème méthode :

En effectuant le chang de variables : $t = e^x$, On a :

$$\begin{cases} x = \ln 2 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = 1 \end{cases}$$

et $dt = e^x \, dx \Leftrightarrow dx = \dfrac{dt}{t}$

et on aboutit à :

$$M = \int_2^1 \left(\frac{t + \frac{3}{t}}{t + \frac{1}{t}} \right) \times \frac{dt}{t}$$

$$= \int_2^1 \frac{t^2 + 3}{t(t^2+1)} \, dt$$

$$\Leftrightarrow M = \int_2^1 \frac{3}{t}\,dt - \int_2^1 \frac{2t}{t^2+1}\,dt$$

$$= \Big[3\ln t - \ln|t^2+1|\Big]_2^1$$

$$= -\ln 2 - (3\ln 2 - \ln 5)$$

Finalement,

$M = \ln 5 - 4 \ln 2$